Ansätze für effiziente Lösungen von Cutting sticks-Problemen und deren Charakterisierung

Alexander Büchel
Ulrich Gilleßen
Kurt-Ulrich Witt

Publisher: Dean Prof. Dr. Wolfgang Heiden

Hochschule Bonn-Rhein-Sieg – University of Applied Sciences,
Department of Computer Science

Sankt Augustin, Germany

August 2017

Technical Report 05-2017

Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

ISSN 1869-5272 ISBN 978-3-96043-050-6

Digital Object Identifier doi:10.18418/978-3-96043-050-6
DOI-Resolver http://dx.doi.org/

Ansätze für effiziente Lösungen von Cutting sticks-Problemen und deren Charakterisierung

Alexander Büchel[1,2], Ulrich Gilleßen[2], Kurt-Ulrich Witt[1,2]

Hochschule Bonn-Rhein-Sieg
Fachbereich Informatik
[1]b-it Applied Science Institute
[2]Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik und Optimierung (ADIMO)
alexander.buechel@smail.inf.h-brs.de, ulrich.gillessen@smail.inf.h-brs.de, kurt-ulrich.witt@h-brs.de

Zusammenfassung Das Cutting sticks-Problem ist in seiner allgemeinen Formulierung ein NP-vollständiges Problem mit Anwendungspotenzialen im Bereich der Logistik. Unter der Annahme, dass $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ ist, existieren keine effizienten, d.h. polynomiellen Algorithmen zur Lösung des allgemeinen Problems. In diesem Papier werden Ansätze aufgezeigt, mit denen bestimmte Instanzen des Problems effizient berechnet werden können. Für die Berechnung wichtige Parameter werden charakterisiert und deren Beziehung untereinander analysiert.

Schlüsselwörter: Cutting sticks-Problem, Mengenpartitionsproblem, Teilsummenaufteilung

1 Problemstellung

Im Folgenden sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, und für $n \in \mathbb{N}$ sei $[\,n\,] = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der Zahlen von 1 bis n sowie $[\,n\,]_0 = [\,n\,] \cup \{0\}$. Mit $\mathbb{U} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ bezeichnen wir die Menge der ungeraden und mit $\mathbb{G} = \{0, 2, 4, \ldots\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

die Summe der Zahlen von 1 bis n, die so genannte *Dreieckszahl* von n.

Das *Cutting sticks-Problem* ist gegeben durch die Längen $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{N}$ von k Stäben (engl. sticks), die eine Mindestlänge von $n \in \mathbb{N}$ haben, d.h. es ist, $t_j \geq n$, $1 \leq j \leq k$, und für die

$$\sum_{j=1}^{k} t_j = \Delta_n$$

gilt. Die Frage ist, ob die gegebenen Stäbe in n Teile geschnitten werden können, die die Längen von 1 bis n haben. Dieses Problem kann wie folgt als ein Partitionierungsproblem betrachtet werden: Gegeben seien $n, k, t_j, 1 \leq j \leq k$. Können die Elemente von $[\,n\,]$ so in Mengen T_j, $1 \leq j \leq k$, aufgeteilt werden, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:[1]

[1]In den folgenden Kapiteln werden die Mengen T_j auch *Container* genannt.

(i) $\sum T_j = t_j$;[2]

(ii) $T_i \cap T_j = \emptyset$ für $1 \le i, j \le k$ und $i \ne j$;

(iii) $\bigcup_{j=1}^{k} T_j = [\, n\,]$;

(iv) $\sum_{j=1}^{k} t_j = \Delta_n$.

Dabei sind unter der Annahme, dass die Eigenschaften (i) und (ii) gegeben sind, die beiden Eigenschaften (iii) und (iv) äquivalent. Wir nennen $(k; t_1, \ldots, t_k)$ eine *Partition von* n und die Teilmengenfolge $\{T_j\}_{1 \le j \le k}$ eine $(k; t_1, \ldots, t_k)$*-Partitionierung von* $[\, n\,]$. Damit ist das Cutting sticks-Problem äquivalent zu folgendem Mengen-Partitionierungssproblem: Existiert eine $(k; t_1, \ldots, t_k)$-Partitionierung von $[\, n\,]$? Wir bezeichnen dieses Problem kurz mit $\Pi(n; k; t_1, \ldots, t_k)$.

Dies ist ein NP-hartes Entscheidungsproblem. In Fu und Hu (1992) wird gezeigt, dass es für $k, l, t \in \mathbb{N}$ mit $0 < l \le \Delta_n$ und $(k-1)t + l + \Delta_{k-2} = \Delta_n$ eine $(k; t, t+1, \ldots, t+k-2, l)$-Partitionierung von $[\, n\,]$ gibt. Chen et al. (2005) beweisen, dass es eine $(k; t_1, \ldots, t_k)$-Partitionierung von $[\, n\,]$ gibt, falls $\sum_{j=1}^{k} t_j = \Delta_n$ und $t_j \ge t_{j+1}$ für $1 \le j \le k-1$ sowie $t_{k-1} \ge n$ ist. In Büchel et al. (2016) wird ein 0/1-Programm für die Lösung allgemeiner Partitionierungsprobleme angegeben.

In Büchel et al. (2016) wird insbesondere auch die spezielle Variante des Partitionierungsproblems betrachtet, bei der alle Stäbe die selbe Länge haben bzw. bei der die Summe der Elemente jeder Teilmenge gleich sind, d.h. es ist $t_j = t = \mathsf{const}$, $1 \le j \le k$. Diese Probleme nennen wir *homogen* (entsprechen nennen wir allgemeine Problemstellungen *inhomogen*). Das Entscheidungsproblem reduziert sich bei dieser speziellen Variante auf die Frage, ob eine (k, t)-Partitionierung von $[\, n\,]$ existiert, welches wir im Folgenden kurz mit $\Pi(n, k, t)$ bezeichnen. In Straight und Schillo (1979) wird gezeigt, dass für k, t mit $\Delta_n = k \cdot t$ und $t \ge n$ solche Partitionierungen existieren. Diese werden in Büchel et al. (2016) weiter untersucht und für spezielle Fälle Lösungen explizit angegeben. Außerdem wird ein Backtracking-Algorithmus angegeben, der für alle diese Fälle eine Lösung berechnet. In Ando et al. (1990) wird von der Anforderung $\Delta = k \cdot t$ abgewichen und gezeigt, dass die Menge $[\, n\,]$ genau dann in k disjunkte Teilmengen T_j mit $\sum T_j = t$ für $1 \le j \le k$ zerlegt werden kann, wenn $k(2k-1) \le k \cdot t \le \Delta_n$.

Bei allen zitierten Untersuchungen steht die Existenz von Partitionierungen im Vordergrund, und in den Fällen, in denen implizit (z.B. bei Induktionsbeweisen für die Existenz) oder explizit (bei Angabe von Algorithmen) Verfahren zur Bestimmung von Partitionierungen angegeben werden, spielt die Effizienz dieser Verfahren keine Rolle. Abgesehen von einigen sehr speziellen Fällen, die in Büchel et al. (2016) betrachtet werden und die dort polynomiell gelöst werden, haben die anderen Verfahren im Allgemeinen exponentielle Laufzeiten.

In Büchel et al. (2016) wird gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Partition

$$\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, n + \frac{1}{2} - (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} \right) \tag{1.1}$$

[2]Für eine endliche Menge $M \subset \mathbb{N}_0$ sei $\sum M = \sum_{x \in M} x$.

existiert sowie dass zu diesen jeweils genau eine „triviale“ Partitionierung von $[\, n\,]$ gehört, nämlich für $n \in \mathbb{U}$ die Partitionierung

$$T_1 = \{n\}\,,\;\; T_i = \{n - (i-1), i-1\}\,, 2 \leq i \leq \frac{n+1}{2} \tag{1.2}$$

sowie für $n \in \mathbb{G}$ die Partitionierung

$$T_i = \{n - (i-1), i\}\,, 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \tag{1.3}$$

Diese Partitionierungen werden dort und im Folgenden *Gauß-Partitionierungen* genannt.

Im Kapitel 2 untersuchen wir, für welche weiteren Instanzen die Idee der Gauß-Partionierung ausgenutzt werden kann. In den Kapiteln 3, 4 und 5 werden spezielle Probleminstanzen betrachtet und die sie bestimmenden Parameter charakterisiert und deren Beziehungen untereinander analysiert. Kapitel 6 fasst die Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf weitere Lösungsansätze.

2 Transformation von Containern

Um die Idee der Gauß-Partitionierung für weitere Probleminstanzen auszunutzen, transformieren wir unter bestimmten Voraussetzungen gegebene Instanzen in neue Instanzen, zu denen Gauß-Partitionierungen existieren, aus denen dann Lösungen für die Ausgangsinstanzen bestimmt werden können.

Wir betrachten im Folgenden homogene Partitionsprobleme $\Pi(n, k, t)$ mit $t \geq 2n$. Damit ergibt sich aus

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2} = k \cdot t \tag{2.1}$$

$$k \leq \frac{n+1}{4} \tag{2.2}$$

Wegen der Voraussetzung $t \geq 2n$ können Container der Größe t so gespalten werden, dass Container der Mindestgröße n entstehen. Dazu teilen wir die Containerkapazität t durch n, so dass

$$t = ny + z \;\text{ mit }\; n \leq z < 2n \tag{2.3}$$

gilt und damit

$$y = \left\lfloor \frac{t}{n} \right\rfloor - 1 \tag{2.4}$$

Wir erhalten somit für jeden Container der Größe t jeweils y Container der Größe n und einen Container der Größe z. Auf diese Weise verfahren wir mit den Containern $1, \ldots, k-1$ und lassen den Container k unberührt. Aus dem Partitionierungsproblem $\Pi = \Pi(n, k, t)$ wird somit das Problem

$$\Pi' = \Pi\,(\, n; k; t_{1,1}, \ldots, t_{1,y}, t_{1,y+1}, \ldots, t_{k-1,1}, \ldots, t_{k-1,y}, t_{k-1,y+1}, t_k\,) \tag{2.5}$$

mit

$$t_{i,j} = \begin{cases} n, & 1 \leq j \leq y \\ z, & j = y+1 \end{cases} \quad \text{für jeweils } 1 \leq i \leq k-1$$
$$t_k = t \tag{2.6}$$

Π' hat also die Gestalt:

$$\Pi' = \Pi\left(n; k; \underbrace{\underbrace{n, \ldots, n}_{y\text{-mal}}, z, \ldots, \underbrace{n, \ldots, n}_{y\text{-mal}}, z}_{(k-1)\text{-mal}}, t \right) \tag{2.7}$$

Wir erhalten insgesamt $y(k-1)$ Container der Größe n, $k-1$ Container der Größe z und einen Container der Größe t, welche in der Summe

$$y(k-1)n + (k-1)z + t = k \cdot t = \Delta_n \tag{2.8}$$

ergeben, womit die Gesamtbilanz stimmt. Als Gesamtzahl der neuen Container ergibt sich

$$k' = y(k-1) + (k-1) + 1 = (y+1)(k-1) + 1 \tag{2.9}$$

Aus einer Lösung für die Probleminstanz Π' lässt sich durch entsprechendes Zusammenfassen der Container von Π' eine Lösung für die Ausgangsinstanz Π bestimmen: Für $1 \leq i \leq k-1$ werden jeweils die Container T_{ij} für $1 \leq j \leq y+1$ zum Container T_i vereinigt; die übrig bleibenden Elemente bilden den Container T_k.

Wir untersuchen im Folgenden, unter welchen Bedingungen eine „Gauß-artige“ Partitionierung für Π' und damit eine Lösung für Π effizient bestimmt werden können:

(i) Wir ergänzen $[\,n\,]$ mit 0 zur Menge

$$N = [\,n\,] \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n-3, n-2, n-1, n\}$$

und bilden damit zunächst $y(k-1)$ Container T_{ij} mit $1 \leq i \leq k-1$ und $1 \leq j \leq y$ der Größe n wie folgt:

$$T_{ij} = \{n - ((i-1)y + (j-1)), (i-1)y + (j-1)\} \tag{2.10}$$

Diese Aufteilung ist in Abbildung 1 a) dargestellt.

(ii) Jetzt bleibt zu untersuchen, wie mit den übrig gebliebenen Elementen aus $[\,n\,]$ $(k-1)$ Container der Größe z und ein Container der Größe t gefüllt werden können; dabei ist $n \leq z < 2n$.

Mit den von N übrig bleibenden Elementen

$$N' = N - \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq k-1 \\ 1 \leq j \leq y}} T_{ij} = \{y(k-1), \cdots, n - y(k-1)\}$$

müssen nun $(k-1)$ Container der Größe z mit $n \leq z < 2n$ gefüllt werden. In Abbildung 1 b) - d) sind mögliche Fälle, die dabei auftreten können, veranschaulicht.

Dazu betrachten wir nun Möglichkeiten zur Befüllung der z-Container analog zum Fall (a), d.h. die Fälle, in denen sich z $(k-1)$-mal als Summe von zwei Zahlen aus N' darstellen lässt.

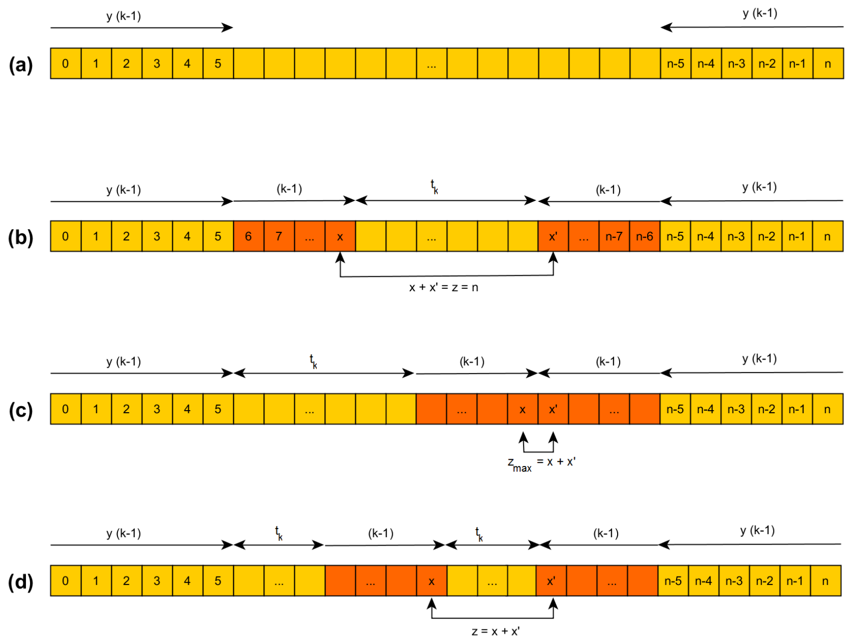

Abb. 1: Berechnungen von z

(1) Der Fall (b), bei dem z gleich der Summe von

$$\begin{aligned} x &= \min N' + (k-1) - 1 \\ &= y(k-1) + (k-1) - 1 \\ &= (y+1)(k-1) - 1 \\ &= k' - 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x' &= \max N' - (k-1) + 1 \\ &= n - y(k-1) - (k-1) + 1 \\ &= n - (y+1)(k-1) + 1 \\ &= n - k' + 2 \\ &= n - x \end{aligned}$$

also

$$z = x + x' = n$$

ist. Wegen (2.3) ist dann

$$t = ny + n = n(y + 1) \tag{2.11}$$

Damit ist $n|t$ und damit $2k|n + 1$. Im Fall $z = n$ ist also $n \in \mathbb{U}$ und $2k|n + 1$ für alle Partitionen (k, t) von n. Für $n \in \mathbb{G}$ kann der Fall $z = n$ nicht auftreten.

Lemma 2.1 *Sei $\Pi(n, k, t)$ gegeben mit $n \in \mathbb{G}$ sowie $t = ny + z$ mit $n \leq z < 2n$, dann ist $z \neq n$.*

Beweis *Wir nehmen an, dass $z = n$ ist. Dann ist $t = ny + n = n(y + 1)$. Damit gilt*

$$\Delta_n = \frac{n(n + 1)}{2} = k \cdot t = kn(y + 1)$$

Daraus folgt $n + 1 = 2k(y + 1)$ und damit $n + 1 \in \mathbb{G}$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $n \in \mathbb{G}$ ist. □

Die $k - 1$ Container $T_{i,y+1}$ der Größe $z = n \in \mathbb{U}$ werden wie folgt mit Elementen aus N' gefüllt:

$$T_{i,y+1} = \{y(k - 1) + (i - 1), n - y(k - 1) - (i - 1)\} \text{ mit } 1 \leq i \leq k - 1 \tag{2.12}$$

Es verbleiben jetzt noch die Elemente von

$$a = x + 1 = (y + 1)(k - 1) = k' - 1$$

bis

$$b = x' - 1 = n - (y + 1)(k - 1) = n - k' + 1 = n - a$$

d.h. die Menge

$$\{(y + 1)(k - 1), \ldots, n - (y + 1)(k - 1)\}$$

übrig. Wir berechnen die Summe dieser Elemente

$$\begin{aligned}
\sum_{i=a}^{b} i &= \frac{(b - a + 1)(b + a)}{2} \\
&= \frac{(n - 2k' + 3)n}{2} \\
&= \frac{n^2 + n - 2n(k' - 1)}{2} \\
&= \frac{n^2 + n}{2} - n(y + 1)(k - 1) && \text{wegen (2.9)} \\
&= kt - t(k - 1) && \text{wegen (2.1) bzw. (2.11)} \\
&= t
\end{aligned}$$

und erhalten also genau die Summe t für den letzten Container T_k.

Für den Fall (2.11), d.h. für den Fall $n \in \mathbb{U}$ und $z = n$ erhalten wir also eine Partitionierung von Π'. Aus dieser bestimmen wir eine Partitionierung für Π wie folgt:

$$T_i = \begin{cases} \bigcup_{1 \le j \le y} T_{ij} \cup T_{i,y+1}, & 1 \le i \le k-1 \\ \\ \{(y+1)(k-1), \ldots, n-(y+1)(k-1)\}, & i = k \end{cases} \tag{2.13}$$

(2) Nun betrachten wir den Fall

$$t = ny + z \text{ mit } n < z < 2n \tag{2.14}$$

und überlegen, was der größte Wert $z_{\max}$ für z sein kann, so dass sich auch in diesem Fall z $(k-1)$-mal als Summe von zwei Elementen aus N' darstellen lässt. Dieser Extremfall liegt vor, falls in Abbildung 1 c) der linke orange gefärbte Zahlenblock so weit wie möglich nach rechts geschoben wird und an den anderen orange gefärbten Zahlenblock stößt. $z_{\max}$ ergibt sich dann als Summe von

$$\begin{aligned} x' &= n - (y+1)(k-1) + 1 \\ &= n - k' + 2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

und

$$\begin{aligned} x = b = x' - 1 &= n - (y+1)(k-1) \\ &= n - k' + 1 \end{aligned} \tag{2.16}$$

zu

$$\begin{aligned} z_{\max} = x + x' &= 2(n - (y+1)(k-1)) + 1 \\ &= 2(n - k') + 3 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Aus (2.17) folgt unmittelbar

Folgerung 2.1 *Sei* $\Pi(n, k, t)$ *gegeben mit* $t = ny + z \ge 2n$ *und* $n < z < 2n$*, dann ist* $z_{\max} \in \mathbb{U}$. □.

Für den Fall $z = z_{\max}$ erhalten wir die folgenden $k-1$ Container der Größe z:

$$T_{i,y+1} = \{x - (i-1), x' + (i-1)\} \text{ für } 1 \le i \le k-1 \tag{2.18}$$

Von N' verbleiben jetzt noch die Elemente

$$\{y(k-1), \ldots, n - (y+2)(k-1)\}$$

Mit diesen wird nun der k-te Container gefüllt. Für dessen Inhalt ergibt sich die Summe

$$\sum_{i=y(k-1)}^{n-(y+2)(k-1)} i = \sum_{i=y(k-1)}^{n-y(k-1)-2(k-1)} i$$

$$= \frac{1}{2}(n - y(k-1) - 2(k-1) - y(k-1) + 1)(n - y(k-1) - 2(k-1) + y(k-1))$$

$$= \frac{1}{2}(n - 2(k-1)(y+1) + 1)(n - 2(k-1))$$

$$= \frac{1}{2}(n^2 - 2n(k-1) - 2n(k-1)(y+1) + 4(k-1)^2(y+1) + n - 2(k-1))$$

$$= \frac{n^2+n}{2} - (k-1)(n(y+1) - n + 2n - 2(k-1)(y+1) + 1)$$

$$= \frac{n^2+n}{2} - (k-1)(ny + n - n + 2(n - (k-1)(y+1)) + 1)$$

$$= k \cdot t - (k-1)(ny + z) \quad \text{(wegen (2.1)) bzw. (2.17)}$$

$$= k \cdot t - (k-1)t \qquad \text{(wegen (2.11))}$$

$$= t$$

Für den Fall $z = z_{\max}$ erhalten wir also eine Partitionierung für Π'. Aus dieser bestimmen wir folgendermaßen eine Partitionierung für Π:

$$T_i = \begin{cases} \bigcup_{1 \le j \le y} T_{ij} \cup T_{i,y+1}, & 1 \le i \le k-1 \\ \{y(k-1), \dots, n-(y+2)(k-1)\}\,, & i = k \end{cases} \tag{2.19}$$

(3) Jetzt betrachten wir den Fall $n < z < z_{\max}$. Wir belassen nach (2.15)

$$x' = n - (y+1)(k-1) + 1 = n - k' + 2 \tag{2.20}$$

und setzen

$$\mathbf{x} = z - x' \tag{2.21}$$

und befüllen $k-1$ Container der Größe z wie folgt:

$$T_{i,y+1} = \{\mathbf{x} - (i-1), x' + (i-1)\} \;\text{ für }\; 1 \le i \le k-1 \tag{2.22}$$

Die von N' übrig bleibenden Elemente sind

$$\{y(k-1),\ldots,\mathbf{x}-(k-1)\} \cup \{\mathbf{x}+1,\ldots,x'-1\} \tag{2.23}$$

Damit ist auch für den Fall $n < z < z_{\max}$ eine Partitionierung für die Instanz Π' bestimmt, woraus eine Lösung für Π wie folgt erreicht wird:

$$T_i = \begin{cases} \bigcup_{1\le j\le y} T_{ij} \cup T_{i,y+1}, & 1 \le i \le k-1 \\ \\ \{y(k-1),\ldots,\mathbf{x}-(k-1),\mathbf{x}+1,\ldots,x'-1\}\,, & i = k \end{cases} \tag{2.24}$$

Auch hier verifizieren wir, dass die Summe der Elemente in der Menge (2.23) gleich t ist und damit der letzte Container T_k korrekt befüllt wird. Dazu setzen wir

$$a = y(k-1) = yk - y \tag{2.25}$$
$$b = \mathbf{x} - k + 1 = z - x' - k + 1 = t - ny - n + yk - y - 1 \tag{2.26}$$
$$a' = \mathbf{x} + 1 = t - ny - n + yk - y + k - 1 \tag{2.27}$$
$$b' = x' - 1 = n - yk + y - k + 1 \tag{2.28}$$

und berechnen damit zunächst

$$2\sum_{i=a}^{b} i + 2\sum_{i=a'}^{b'} i \tag{2.29}$$

Es ist[3]

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=a}^{b} i &= (t-ny-n+yk-y-1+yk-y)(t-ny-n+yk-y-yk+y) \\ &= (t-ny-n+2yk-2y-1)(t-ny-n) \\ &= t^2 - 2nty - 2tn + n^2y^2 + 2n^2y + n^2 + 2ykt - 2y^2kn - 2ykn \\ &\quad - 2yt + 2ny^2 + 2yn - t + ny + n \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=a'}^{b'} i &= (n-yk+y-k+1+t-ny-n+yk-y+k-1) \\ &\quad \cdot (n-yk+y-k+2-t+ny+n-yk+y-k+1) \\ &= (t-ny)(2n-2yk+2y-2k+3-t+ny) \\ &= 2tn - 2ykt + 2yt - 2kt + 3t - t^2 + 2tny - 2n^2y + 2ny^2k \\ &\quad - 2ny^2 + 2kny - 3ny - n^2y^2 \end{aligned}$$

Als Summe der Elemente der Menge (2.23) ergibt sich daraus

$$\sum_{i=a}^{b} i + \sum_{i=a'}^{b'} i = \frac{n^2+2t+n-2kt}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - kt + t = t$$

womit gezeigt ist, dass die Summe der Elemente in T_k gleich t ist.

[3] Wir verwenden bei Berechung der Summen die Formel: $\sum_{i=a}^{b} i = \frac{(b+a)(b-a+1)}{2}$.

Aus (1), (2) und (3) folgt für den Fall

$$n \leq z \leq z_{\max} < 2n \leq t$$

ein Lösungsverfahren für die Instanzen Π' und damit für die Ausgangsinstanzen Π. Der Fall $z_{\max} < z < 2n$ muss noch untersucht werden.

Beispiel 2.1 *(1) Sei $n = 24$, also $\Delta_{24} = 300$, sowie $k = 4$. Dann ist*

$$t = 75 = 24 \cdot 2 + 27 \textit{ also } y = 2 \textit{ und } z = 27$$

sowie

$$\begin{aligned} x &= 24 - 3 \cdot 3 = 15 \\ x' &= x + 1 = 16 \\ z_{\max} &= x + x' = 31 > 27 = z \\ \mathbf{x} &= z - x' = 11 \end{aligned}$$

Wir erhalten $2 \cdot 3 = 6$ 24-er Container, die Gauß-befüllt werden, drei 27-er Container, die mit $\mathbf{x}$ und x' beginnend, dann auf- bzw. absteigend befüllt werden, und einen 75-er Container, in den der Rest passt:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 27 & 27 & 27 & & 75 \\ \\ 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 16 & 17 & 18 & & 6, \ldots, 8, \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 11 & 10 & 9 & & 12, \ldots, 15 \end{array}$$

Eine $(4, 75)$-Partitionierung von $[\,24\,]$ ergibt sich nun, indem dreimal jeweils zwei 24- und ein 27-Container zu einem 75-Container zusammengefasst werden.

(2) Sei $n = 100$, also $\Delta_{100} = 5050$, sowie $k = 10$. Dann ist

$$t = 505 = 100 \cdot 4 + 105 \textit{ also } y = 4 \textit{ und } z = 105$$

sowie

$$\begin{aligned} x &= 100 - 5 \cdot 9 = 55 \\ x' &= x + 1 = 56 \\ z_{\max} &= x + x' = 111 > 105 = z \\ \mathbf{x} &= z - x = 49 \end{aligned}$$

Wir erhalten $4 \cdot 9 = 36$ 100-er Container, die Gauß-befüllt werden, und neun 105-er Container, die mit $\mathbf{x}$ und x' und dann auf- bzw. absteigend befüllt werden, der Rest passt in den 505-er Container:

$$\begin{array}{ccccccc} 100 & \ldots & 100 & 105 & \ldots & 105 & 505 \\ \\ 100 & \ldots & 65 & 56 & \ldots & 64 & 36, \ldots, 40 \\ 0 & \ldots & 35 & 49 & \ldots & 41 & 50, \ldots, 55 \end{array}$$

Eine $(10, 505)$-Partitionierung von $[\,100\,]$ ergibt sich nun, indem neunmal jeweils vier 100- und ein 105-Container zu einem 505-Container zusammengefasst werden. $\square$

3 Die Fälle $2k|n+1$ und $2k|n$

Im vorigen Kapitel wird für den Fall $t \geq 2n$ ein Transformationsalgorithmus vorgestellt. Dabei spielen die Größen $z, x, x', z_{\max}$ und $\mathbf{x}$ wichtige Rollen. In diesem Kapitel untersuchen wir Eigenschaften und Beziehungen dieser Parameter für die Fälle

(1) $2k|n+1$ und

(2) $2k|n$.

3.1 Fall: $2k|n+1$

Lemma 3.1 *Es sei die Problemstellung $\Pi(n;k,t)$ gegeben mit $t = ny + r$, $0 \leq r < n$, und $2k|n+1$, dann gilt $r = 0$.*

Beweis *Aus (2.1) folgt, da $2k|n+1$ vorausgesetzt ist, dass $n|t$ gilt. Mit der weiteren Voraussetzung $t = ny + r$ folgt, dass auch $n|r$ gilt. Da $0 \leq r < n$ vorausgesetzt ist, folgt die Behauptung $r = 0$.* □

Lemma 3.2 *Es sei die Problemstellung $\Pi(n;k,t)$ gegeben mit $t = ny + z \geq 2n > z = n$, dann gilt $2k|n+1$.*

Beweis *Ist $z = n$, dann ist $t = ny + n = n(y+1)$. Damit gilt $n|t$ und damit wegen (2.1) die Behauptung $2k|n+1$.* □

Aus den beiden obigen Lemmata folgt

Satz 3.1 *Es sei die Problemstellung $\Pi(n;k,t)$ gegeben mit $t = ny+z \geq 2n > z \geq n$. Dann gilt $2k|n+1$ genau dann, wenn $z = n$ gilt.* □

Der Fall (1) im Kapitel 2 tritt also genau dann ein, wenn $2k|n+1$ gilt.

Satz 3.2 *Es sei die Problemstellung $\Pi(n;k,t)$ gegeben mit $2k|n+1$, dann gilt $z < z_{\max}$.*

Beweis *Wegen der Voraussetzung $2k|n+1$ gilt*

$$t = n(y+1) \ \text{mit}\ y \geq 0 \tag{3.1}$$

sowie

$$2k = \frac{n(n+1)}{t} \tag{3.2}$$

und mit Satz 3.1

$$z = n \tag{3.3}$$

Es gilt nun $z < z_{\max}$

$$\begin{aligned}
&\text{gdw. } n < 2n - 2ky + 2y - 2k + 3 && \text{wegen (3.3) und (2.17)}\\
&\text{gdw. } 0 < n - 2k(y+1) + 2y + 3 && \\
&\text{gdw. } 0 < n - 2k\frac{t}{n} + 2y + 3 && \text{wegen (3.1)}\\
&\text{gdw. } 0 < n - \frac{n(n+1)t}{tn} + 2y + 3 && \text{wegen (3.2)}\\
&\text{gdw. } 0 < 2(y+1) &&
\end{aligned}$$

Da $y \geq 0$ ist, ist die Behauptung gezeigt. □

3.2 Fall: $2k|n$

Mit der Voraussetzung $2k|n$ muss wegen Satz 3.1 in der Darstellung $t = ny + z$ mit $n \leq z < 2n$ $z \neq n$ sein, d.h. im Folgenden ist $z > n$. Wir wollen nun für die Darstellung

$$t = ny + z \text{ mit } n < z < 2n \tag{3.4}$$

y und z berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} t &= \frac{n(n+1)}{2k} \\ &= \frac{n^2 - 2kn + 2kn + n}{2k} \\ &= n \cdot \frac{n-2k}{2k} + \frac{n(2k+1)}{2k} \\ &= n \cdot \left(\frac{n}{2k} - 1\right) + \frac{n(2k+1)}{2k} \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit (3.4) erhalten wir

$$y = \frac{n}{2k} - 1 \text{ und damit } n = 2k(y+1) \tag{3.5}$$

und wegen $\dfrac{n}{2k} = \dfrac{t}{n+1}$ auch

$$y = \frac{t}{n+1} - 1 \text{ und damit } t = (n+1)(y+1) \tag{3.6}$$

Des Weiteren erhalten wir durch Vergleich mit (3.4)

$$z = \frac{n(2k+1)}{2k} \tag{3.7}$$

Mit (3.4) und (3.6) folgt

$$z = n + y + 1 \tag{3.8}$$

Wir setzen wie in Kapitel 2 (siehe (2.20) und (2.21)):

$$\begin{aligned} x &= n - (y+1)(k-1) && (3.9) \\ x' &= x + 1 && (3.10) \\ z_{\max} &= x + x' = 2x + 1 && (3.11) \\ &= 2(n - (y+1)(k-1)) + 1 && (3.12) \\ \mathbf{x} &= z - x' && (3.13) \end{aligned}$$

Lemma 3.3 *Sei $\Pi(n;k,t)$ mit $t = ny + z \geq 2n > z > n$ und $2k|n$ gegeben, dann ist $\mathbf{x} = k(z-n) - 1$.*

Beweis *Wir starten mit (3.13) und setzen für z (3.8) sowie für x' (3.10) und für x (3.9) ein:*

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= z - x' \\ &= n + y + 1 - n + ky - y + k - 1 - 1 \\ &= k(y+1) - 1 \\ &= k(z-n) - 1 \qquad (3.14)\end{aligned}$$

(3.14) gilt, weil wegen (3.8) $y + 1 = z - n$ ist. Mit (3.14) ist die Behauptung gezeigt. □

Lemma 3.4 *Sei $\Pi(n;k,t)$ mit $t = ny + z \geq 2n > z > n$ und $2k|n$ gegeben, dann ist $\mathbf{x} = \frac{n}{2} - 1$.*

Beweis *Es gilt*

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= z - x' \\ &= n + y + 1 - n + (y+1)(k-1) - 1 && \textit{wegen (3.8), (3.10) und (3.9)} \\ &= (y+1)k - 1 \\ &= \frac{n}{2k} \cdot k - 1 && \textit{wegen (3.5)} \\ &= \frac{n}{2} - 1\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

$\mathbf{x}$ ist also unabhängig von k und t und hängt nur von der Problemgröße n ab, ist also invariant für ein gegebenes n. Aus dem Lemma 3.4 folgt unmittelbar

Satz 3.3 *Sei $n \in \mathbb{N}$ sowie die Problemstellungen $\Pi(n;k,t)$ mit $t = ny + z \geq 2n > z > n$ und $2k|n$ sowie $\Pi(n;k',t')$ mit $t' = ny' + z' \geq 2n > z' > n$ und $2k'|n$ gegeben, dann gilt $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.* □

Des Weiteren stehen z und $z_{\max}$ für ein gegebenes n in einem festen Zusammenhang, der allein durch n bestimmt ist; die unterschiedlichen Partitionen (k,t) von n spielen dabei ebenfalls keine Rolle.

Satz 3.4 *Sei $\Pi(n;k,t)$ mit $t = ny + z \geq 2n > z > n$ gegeben. Dann gilt $2k|n$ genau dann, wenn $2z - z_{\max} = n - 1$ ist.*

Beweis *„$\Rightarrow$“ Es gilt $\mathbf{x} = z - x'$. Mit den Voraussetzungen sowie mit Lemma 3.4 und (3.10) folgt*

$$\frac{n}{2} - 1 = z - n + (y+1)(k-1) - 1$$

und daraus

$$n - 1 = 2z - 2(n - (y+1)(k-1)) - 1$$

und hieraus mit (3.12)

$$n - 1 = 2z - z_{\max}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

„$\Leftarrow$“: Wir nehmen an, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $2k \nmid n$ ist. Dann könnte $2k|n+1$ sein. Dann folgt aber mit Satz 3.1 $z = n$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $z > n$ ist. Also ist auch $2k \nmid n+1$. Es gibt somit $q, r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n = 2kq + r, \qquad 1 \le r < 2k \tag{3.15}$$

$$n + 1 = 2kq + r + 1, \quad 2 \le r + 1 \le 2k \tag{3.16}$$

In (3.16) gilt sogar $r + 1 < 2k$, weil sonst $2k|n+1$ wäre, was wir aber ausgeschlossen haben. Es gilt in jedem Fall

$$n - r = 2kq \text{ und damit } 2k|n - r \tag{3.17}$$

Wir berechnen nun für die Darstellung $t = ny + z$ den Quotienten y und den Rest z:

$$\begin{aligned} t &= \frac{n(n+1)}{2k} \\ &= \frac{n^2 - (2k+r)n + (2k+r)n + n}{2k} \\ &= n \cdot \left(\frac{n-r}{2k} - 1 \right) + \frac{n(2k+r+1)}{2k} \end{aligned}$$

Es folgt

$$y = \frac{n-r}{2k} - 1 \text{ sowie } z = \frac{n(2k+r+1)}{2k} \tag{3.18}$$

Für $z_{\max}$ setzen wir (3.12) in die Voraussetzung $2z - z_{\max} = n - 1$ ein und formen die entstehende Gleichung um in

$$2k(y+1) = 3n + 2y - 2z + 2 \tag{3.19}$$

Durch Einsetzen von (3.18) erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} 2k(y+1) &= 3n + \frac{n-r}{k} - 2 - \frac{n(2k+r+1)}{k} + 2 \\ &= \frac{kn - r(n+1)}{k} \end{aligned}$$

und daraus

$$2k^2(y+1) = 3kn + (n-r) - n(2k+r+1) \tag{3.20}$$

Offensichtlich teilt $2k$ die linke Seite und wegen (3.18) den zweiten und den dritten Summanden auf der rechten Seite. Es folgt, dass $2k$ auch den ersten Summanden $3kn$ teilen muss. Da $2k$ kein Teiler von $3k$ ist, muss $2k|n$ gelten, was ein Widerspruch zur Annahme $2k \nmid n$ ist. Damit ist die Annahme falsch und die Behauptung gezeigt. $\square$

Folgerung 3.1 *Seien $\Pi(n;k,t)$ mit $t = ny+z \geq 2n$ und $\Pi(n;k',t')$ mit $t' = ny'+z' \geq 2n$ und $n < z, z' < 2n$ sowie mit $2k|n$ und $2k'|n$ gegeben. Dann gilt $2z - z_{\max} = 2z' - z'_{\max}$.*

Beweis *Da wegen Lemma 3.4 $2z - z_{\max} = n-1$ und $2z' - z'_{\max} = n-1$ gelten, folgt unmittelbar die Behauptung.* □

Satz 3.5 *Sei $\Pi(n;k,t)$ mit $t = ny+z \geq 2n > z > n$ und $2k|n$ gegeben, dann ist $z < z_{\max}$.*

Beweis *Da die Voraussetzungen von Satz 3.4 erfüllt sind, gilt $2z - z_{\max} = n-1$. Wegen der Voraussetzung $n < z$ folgt*

$$2z - z_{\max} = n - 1 < z - 1 < z$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt. □

3.3 n ist der Vorgänger einer Quadratzahl

Wir haben in den letzten beiden Abschnitten herausgefunden, dass für die Fälle $2k|n+1$ und $2k|n$ $z < z_{\max}$ gilt und damit der Transformationsalgorithmus von Kapitel 2 angewendet werden kann. Wir betrachten nun den Fall $n = s^2 - 1$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$, d.h. den Fall, dass n der Vorgänger einer Quadratzahl ist. Wir werden zeigen, dass für jeweils eine Instanz in diesen Fällen zwar weder $2k|n+1$ noch $2k|n$ ist, aber dennoch $z < z_{\max}$ gilt. Damit können wir, obwohl $t < 2n$ ist, die Methode aus Kapitel 2 anwenden, um diese Probleminstanzen zu lösen.

Es sei also $n = n_s = s^2 - 1$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$. Dann ist

$$\Delta_{n_s} = \frac{(s^2-1)s^2}{2} = k_s \cdot t_s \tag{3.21}$$

Für k_s und t_s kommen unter anderem Produkte aus Faktoren von $(s-1)(s+1)s^2$ infrage. Da $t_s \geq n_s$ sein soll, gibt es für t_s bzw. für k_s die Möglichkeiten

$$t_s = s(s+1) \qquad k_s = \frac{(s-1)s}{2} \tag{3.22}$$

$$t_s = s^2 \qquad k_s = \frac{(s-1)(s+1)}{2} \tag{3.23}$$

$$t_s = (s-1)(s+1) \qquad k_s = \frac{s^2}{2} \tag{3.24}$$

In allen drei Fällen gilt $2n_s > t_s \geq n$. Der Fall (3.23) tritt nur für $s \in \mathbb{U}$ ein, und dann ist $2k_s|n_s$. Der Fall (3.24) tritt nur für $s \in \mathbb{G}$ ein, und dann ist $2k_s|n_s+1$. Beide Fälle interessieren uns hier nicht, sondern der Fall (3.22), der für alle $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$, auftritt und bei dem immer sowohl $2k_s \nmid n_s$ als auch $2k_s \nmid n_s + 1$ zutrifft. Des Weiteren gilt in diesem Fall

$$k_s = \frac{t_{s-1}}{2} \tag{3.25}$$

Wir betrachten im Folgenden also den Fall (3.22); die entsprechenden Instanzen wollen wir *Q-Instanzen* nennen.

Für die Darstellung $t_s = n_s y_s + z_s$ mit $n_s \leq z_s < 2n_s$ ergibt sich $y_s = 0$ sowie $z_s = t_s$. Des Weiteren ergibt sich

$$\begin{aligned} z_{s_{\max}} &= 2(n_s - (y_s+1)(k_s-1)) + 1 \\ &= 2(n_s - k_s + 1) + 1 \\ &= 2\left(s^2 - \frac{(s-1)s}{2}\right) + 1 \\ &= s(s+1) + 1 \\ &= z_s + 1 \end{aligned}$$

Damit ist für alle Q-Instanzen $\Pi\left(s^2-1; \frac{(s-1)s}{2}, s(s+1)\right)$ $z_s < z_{s_{\max}}$, obwohl weder $2k_s|n_s$ noch $2k_s|n_s+1$ gelten. Wegen $t_s < 2n_s$ kann keine („echte“) Spaltung von Containern vorgenommen werden. Es gilt aber $t_s = z_s < z_{s_{\max}}$, d.h. wir haben den „$t = z_s < z_{s_{\max}}$-Fall“ vorliegen. Wir berechnen für diesen die aus Kapitel 2 bekannten Parameter, um damit eine Lösung zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x_s &= n_s - (y_s+1)(k_s-1) = n_s - k_s + 1 = s^2 - 1 - \frac{(s-1)s}{2} + 1 \\ &= \frac{s(s+1)}{2} \\ &= \frac{t_s}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_s &= x_s + 1 \\ &= \frac{t_s}{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x_s} &= z_s - x'_s = t_s - \frac{t_s}{2} - 1 \\ &= \frac{t_s}{2} - 1 \end{aligned}$$

Die Container werden mithilfe dieser Parameter wie in Kapitel 2 beschrieben wie folgt befüllt:

$$T_i = \left\{\frac{t_s}{2} - 1 - (i-1),\ \frac{t_s}{2} + 1 + (i-1)\right\}$$

$$= \left\{\frac{s(s+1)}{2} - i,\ \frac{s(s+1)}{2} + i\right\},\ \ 1 \leq i \leq k_s - 1$$

$$T_{k_s} = \left\{1, 2, \ldots, s, \frac{t_s}{2}\right\}$$

Offensichtlich ist die Summe der beiden Elemente in den Containern T_i, $1 \leq i \leq k_s - 1$ gleich t_s, und die Summe der Elemente in T_{k_s} ergibt ebenfalls t_s:

$$\begin{aligned}\frac{t_s}{2} + \sum_{i=1}^{s} i &= \frac{s(s+1)}{2} + \frac{s(s+1)}{2} \\ &= s(s+1) \\ &= t_s\end{aligned}$$

Beispiel 3.1 *Sei $s = 4$, damit $n_s = 15$ und $\Delta_{15} = 120$, sowie $t_4 = 20$ und damit $k_4 = 6$. Dann ergibt sich mit dem obigen Verfahren folgende $(6, 20)$-Partitionierung von $[15]$: $T_1 = \{9, 11\}$, $T_2 = \{8, 12\}$, $T_3 = \{7, 13\}$, $T_4 = \{6, 14\}$, $T_5 = \{5, 15\}$, $T_6 = \{1, 2, 3, 4, 10\}$.* □

3.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden die Parameter, die in Kapitel 2 wichtig für die Spaltung von Containern sind, untersucht und in Beziehung gesetzt. Insbesondere wird festgestellt, dass, wenn $2k|n$ oder $2k|n+1$ gilt, $z < z_{\max}$ ist, und somit eine Lösung für die entsprechenden Probleminstanzen mithilfe der Verfahren in Kapitel 2 bestimmt werden können. Wir haben aber auch Probleminstanzen gefunden, nämlich die Q-Instanzen, in denen weder $2k|n$ noch $2k|n+1$ gilt, und dennoch $z < z_{\max}$ zutrifft und das Verfahren von Kapitel 2 angewendet werden kann.

Es stellt sich nun die Frage, ob mit den drei Fällen, dass es sich um eine Probleminstanz mit $2k|n$ oder mit $2k|n+1$ oder um eine Q-Instanz handelt, alle Fälle mit $z < z_{\max}$ erfasst sind. Das heißt: Ist weder $2k|n$ noch $2k|n+1$ und liegt auch keine Q-Instanz vor, gilt dann immer $z \geq z_{\max}$?

Empirische Untersuchungen scheinen eine solche Vermutung zu bestätigen: *Für eine Probleminstanz $\Pi(n; k, t)$ gilt $z < z_{\max}$ genau dann, wenn $2k|n$ oder $2k|n+1$ gilt oder wenn Π eine Q-Instanz ist.*

4 Fall: $\boldsymbol{n = 2p,\ p \in \mathbb{P}}$

In diesem Kapitel untersuchen wir für $p \in \mathbb{P}$ die Probleminstanzen $\Pi(2p, k, t)$ mit $t \geq 2p$. Es ist also

$$\Delta_{2p} = p(2p+1) = k \cdot t \tag{4.1}$$

und $k \leq p$. Dabei unterscheiden wir die beiden Fälle $k = p$ und $k < p$. Wir werden sehen, dass der erste Fall, also die Probleminstanzen $\Pi(2p, p, t)$, sehr einfach gelöst werden können, während im zweiten Fall eine Spaltung der Container wie in Kapitel 3 vorgeschlagen nicht möglich ist. Die Probleminstanzen des zweiten Falls besitzen allerdings einige interessante Struktureigenschaften, die umfänglich untersucht werden.

Wie in Kapitel 2 führen wir für weitere Betrachtungen die Größen y, z und $z_{\max}$ ein, die wir als abhängig von p und k ansehen:

$$t(p,k) = 2p \cdot y(p,k) + z(p,k) \ \text{ mit } \ 2p \leq z(p,k) < 4p \tag{4.2}$$

$$z_{\max}(p,k) = 2(2p - (y(p,k)+1)(k-1)) + 1 \tag{4.3}$$

Aus schreibtechnischen Gründen notieren wir diese Abhängigkeiten nur, wenn sie nicht aus dem Zusammenhang klar sind oder falls sie noch einmal deutlich gemacht werden sollen.

4.1 Fall: $k = p$

Für den Fall $k = p$ gilt offensichtlich $t = 2p + 1$ sowie

Satz 4.1 *Sei $n = 2p$ mit $p \in \mathbb{P}$ sowie $\Delta_{2p} = k \cdot t$ mit $k = p$, dann existiert für $[\,2p\,]$ nur die Gauß-Partitionierung $T_i = \{2p + 1 - i, i\}$, $1 \leq i \leq p$.* □

Folgerung 4.1 *Sei $p \in \mathbb{P}$ eine Germain-Primzahl, dann existiert für $[\,2p\,]$ neben der trivialen Aufteilung $k = 1$ und $t = \Delta_{2p}$ nur die Gauß-Partitionierung $T_i = \{2p + 1 - i, i\}$, $1 \leq i \leq p$.*

Beweis *Da $2p + 1$ prim ist, existiert nur genau eine Zerlegung mit $k = p$ und $t = 2p + 1$, woraus sich als einzige Partitionierung die in der Folgerung angegebene ergibt.* □

Für die Fälle $k = p$ ist jeweils die Differenz von z und $z_{\max}$ konstant gleich zwei.

Folgerung 4.2 *Sei $n = 2p$ mit $p \in \mathbb{P}$ sowie $\Delta_{2p} = k \cdot t$ mit $k = p$, dann ist $z_{\max}(p, k) = z(p, k) + 2$*

Beweis *Es ist mit (4.2) $t = 2p + 1 = (2p + 1) \cdot 0 + 2p + 1$ und damit $y(p, k) = 0$ sowie $z(p, k) = 2p + 1$. Aus (4.3) folgt mit $k = p$ sowie mit den berechneten $y = 0$ und $z = 2p + 1$: $z_{\max} = 2(2p - (p - 1)) + 1 = 2p + 3$. Womit die Behauptung gezeigt ist.* □

4.2 Fall: $k < p$

Wegen der Voraussetzung $k < p$ kann p keine Germain-Primzahl sein; wir werden deshalb im Folgenden diese Tatsache als gegeben annehmen und nicht jedes Mal aufs Neue erwähnen. Zudem gilt $p \geq 7$, da 7 die kleinste Primzahl ist, die keine Germain-Primzahl ist.

Da p prim und $k < p$ ist, folgt, dass $k|2p{+}1$ und damit $p|t$ gilt:

$$\frac{t}{p} = \frac{2p + 1}{k} \tag{4.4}$$

Wenn wir bei gegebenem $p \in \mathbb{P}$ in (4.1) $k < p$ als variabel ansehen, dann ergibt sich daraus t in Abhängigkeit von p und k:

$$t = t(p, k) = \frac{p(2p + 1)}{k} \tag{4.5}$$

Als erstes können wir feststellen, dass z für die Probleminstanzen $\Pi(2p, k, t)$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $k < p$ unabhängig von k ist.

Satz 4.2 *Sei $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$, sowie $\Delta_{2p} = k \cdot t$ mit $k < p$, dann gilt in (4.2)*

$$z(p, k) = z(p) = 3p = \frac{3}{2}n$$

Beweis *Es ist $\Delta_{2p} = p(2p+1) = k \cdot t$ ungerade, also auch k und t. Da p ein Teiler von t ist, folgt aus (4.2), dass auch $p|z(p,k)$ gilt. Es gibt also ein q mit $z(p,k) = p \cdot q$. Aus (4.2) folgt $2 \leq q < 4$. Ist $q = 2$, dann gilt wegen (4.2) $t(p,k) = 2p \cdot y(p,k) + 2z(p,k)$, und damit wäre t gerade, was ein Widerspruch zur oben gemachten Feststellung ist, dass t ungerade ist. Also bleibt nur die Möglichkeit $q = 3$, womit die Behauptung $z = 3p = \frac{3}{2}n$ gezeigt ist.* □

Folgerung 4.3 *Sei $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$, sowie $\Delta_{2p} = k \cdot t$ mit $k < p$, dann existiert ein $y \in \mathbb{N}_0$ mit*

$$t = 2py + 3p$$

Beweis *folgt unmittelbar aus (4.2) und Satz 4.2.* □

Lemma 4.1 *Für alle $p, q \in \mathbb{P}$ gilt $2p + 1 \neq q^2$.*

Beweis *Für $q = 2$ und $q = 3$ gilt die Behauptung offensichtlich. Wir nehmen an, dass es $p, q \in \mathbb{P}$ gibt mit $q \geq 5$ und $2p + 1 = q^2$. Dann gilt $2p = (q-1)(q+1)$ sowie $q - 1, q + 1 \in \mathbb{G}$. Es folgt $2|q - 1$ sowie $\frac{q-1}{2} \geq 2$ und $q + 1 < p$. Damit lässt sich p faktorisieren in $p = \frac{q-1}{2} \cdot (q+1)$ mit $1 < \frac{q-1}{2}, q + 1 < p$, woraus $p \notin \mathbb{P}$ folgt, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $p \in \mathbb{P}$ ist* □

Lemma 4.2 *Sei $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$, mit $k < p$, dann ist die Anzahl der (k,t)-Partitionen von $2p$ gerade.*

Beweis *Es ist $\Delta_{2p} = p(2p+1)$. Da p nicht Germain-prim ist, kann $2p + 1$ faktorisiert werden. Wegen Lemma 4.1 können die Primfaktoren von $2p + 1$ zu zwei verschiedenen Faktoren k und $\overline{k}$ zusammengefasst werden. Zu jedem Faktor k existiert also ein Faktor $\overline{k}$ mit $2p + 1 = k \cdot \overline{k}$ und $k \neq \overline{k}$. Es folgt, dass zu jeder (k,t)-Partitionierung von $[\,2p\,]$ eine davon verschiedene $(\overline{k},\overline{t})$-Partionierung existiert.* □

Aus den Lemmata 4.1 und 4.2 folgt

Satz 4.3 *Sei $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$, sowie $\Delta_{2p} = k \cdot t$ mit $k < p$, dann existiert zu k ein $\overline{k} < p$ und ein $\overline{t}$ mit $k \neq \overline{k}$, $t \neq \overline{t}$ und $\Delta_{2p} = k \cdot t = \overline{k} \cdot \overline{t}$.* □

Definition 4.1 *Seien $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$, sowie (k,t) und $(\overline{k},\overline{t})$ mit $k \neq \overline{k}$ und $k, \overline{k} < p$ zwei Partitionen von $2p$ mit $k \cdot \overline{k} = 2p + 1$, dann heißen k und $\overline{k}$ dual zueinander. Dabei legen wir $k < \overline{k}$ fest, und des Weiteren sei $\overline{y}(p,k) = y(p,\overline{k})$.* □

Folgerung 4.4 *Sei $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$ und (k,t) eine Partition von $2p$ sowie $\overline{k}$ dual zu k. Dann gilt*

a) $\overline{t} < t$;

b) $t = p \cdot \overline{k}$;

c) $\overline{t} = p \cdot k$.

Beweis **a)** *In Definition 4.1 ist $k < \overline{k}$ festgelegt. Damit gilt $k \cdot \overline{t} < \overline{k} \cdot \overline{t} = k \cdot t$, woraus die Behauptung $\overline{t} < t$ folgt.*

b) *Es gilt einerseits $\Delta_{2p} = k \cdot t$ und andererseits $\Delta_{2p} = p \cdot k \cdot \overline{k}$, woraus die Behauptung folgt.*

c) *folgt analog zu b) mit $\Delta_{2p} = \overline{k} \cdot \overline{t}$.* □

Der folgende Satz besagt, dass die $z_{\max}$-Werte für duale k und $\overline{k}$ identisch sind.

Satz 4.4 *Sei $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$, sowie $\Delta_{2p} = k \cdot t$ mit $k < p$ und $\overline{k}$ dual zu k, dann gilt $z_{\max}(p,k) = z_{\max}(p,\overline{k})$.*

Beweis *Es gilt wegen (4.3) $z_{\max}(p,k) = z_{\max}(p,\overline{k})$*

$$\textit{gdw. } 2 \cdot (2p - (y+1) \cdot (k-1)) + 1 = 2 \cdot (2p - (\overline{y}+1) \cdot (\overline{k}-1)) + 1 \tag{4.6}$$

Aus Folgerung 4.3 wissen wir, dass

$$y = \frac{t-3p}{2p} \ \textit{bzw. } \overline{y} = \frac{\overline{t}-3p}{2p}$$

ist. Durch Einsetzen in (4.6) erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
z_{\max}(p,k) = z_{\max}(p,\overline{k}) \ \textit{gdw. } & \left(\frac{t-3p}{2p}+1\right) \cdot (k-1) = \left(\frac{\overline{t}-p}{2p}\right) \cdot (\overline{k}-1) \\
\textit{gdw. } & \left(\frac{t-p}{2p}\right) \cdot (k-1) = \left(\frac{\overline{t}-p}{2p}\right) \cdot (\overline{k}-1) \\
\textit{gdw. } & \frac{k \cdot (t-p)}{2p} - \frac{t-p}{2p} = \frac{\overline{k} \cdot (\overline{t}-p)}{2p} - \frac{\overline{t}-p}{2p} \\
\textit{gdw. } & \frac{k \cdot t - k \cdot p}{2p} - \frac{t-p}{2p} = \frac{\overline{k} \cdot \overline{t} - \overline{k} \cdot p}{2p} - \frac{\overline{t}-p}{2p} \\
\textit{gdw. } & \frac{\Delta_{2p} - k \cdot p}{2p} - \frac{t-p}{2p} = \frac{\Delta_{2p} - \overline{k} \cdot p}{2p} - \frac{\overline{t}-p}{2p}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Für die weiteren Äquivalenzen benutzen wir zum einen, dass $k \cdot \overline{k} = 2p+1$ ist, woraus

$$\overline{k} = \frac{2p+1}{k} \tag{4.8}$$

folgt. Zum anderen ist

$$k \cdot \overline{k} \cdot t \cdot \overline{t} = \Delta_{2p}^2 = p^2(2p+1)^2$$

woraus

$$t \cdot \overline{t} = p^2(2p+1)$$

folgt und daraus

$$\overline{t} = \frac{p^2 \cdot (2p+1)}{t} \tag{4.9}$$

Durch Einsetzen von (4.8) und (4.9) auf der rechten Seite von (4.7) erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} z_{\max}(p,k) = z_{\max}(p,\overline{k}) \ \textit{gdw.}\ & \frac{\Delta_{2p} - k\cdot p}{2p} - \frac{t-p}{2p} = \frac{\Delta_{2p} - \frac{2p+1}{k}\cdot p}{2p} - \frac{\frac{p^2\cdot(2p+1)}{t} - p}{2p} \\ \textit{gdw.}\ & \Delta_{2p} - k\cdot p - t + p = \Delta_{2p} - \frac{\Delta_{2p}}{k} - \frac{p\cdot\Delta_{2p}}{t} + p \\ \textit{gdw.}\ & k\cdot p + t = \frac{\Delta_{2p}}{k} + \frac{p\cdot\Delta_{2p}}{t} \\ \textit{gdw.}\ & k\cdot p + t = t + p\cdot k \end{aligned}$$

ist, womit die Behauptung gezeigt ist. □

Satz 4.5 *Sei $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$, sowie $\Delta_{2p} = k\cdot t$ mit $k < p$, dann gilt*

a) $\overline{y}(p,k) < y(p,k)$;

b) $(y+1)(k-1) = (\overline{y}+1)(\overline{k}-1)$.

Beweis a) *Wegen Folgerung 4.3 gilt $t = 2py+3p$ und analog $\overline{t} = 2p\overline{y}+3p$. Wegen Folgerung 4.4 a) gilt $\overline{t} < t$ und damit auch $\overline{y} < y$.*

b) *Wegen Satz 4.4 gilt $z_{\max}(p,k) = z_{\max}(p,\overline{k})$. Mit (4.3) folgt hieraus*

$$2(2p - (y+1)(k-1)) + 1 = 2(2p - (\overline{y}+1)(\overline{k}-1)) + 1$$

und hieraus unmittelbar die Behauptung. □

Satz 4.6 *Sei $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$, sowie $\Delta_{2p} = k\cdot t$ mit $k < p$, dann gilt: $k = 2\overline{y}+3$ bzw. $\overline{k} = 2y+3$.*

Beweis *Wegen Folgerung 4.3 gilt $\overline{t} = 2p\overline{y}+3p$ und wegen Folgerung 4.4 c) $\overline{t} = p\cdot k$, woraus $p\cdot k = 2p\overline{y}+3p$ und daraus die Behauptung. Der Beweis der Behauptung $\overline{k} = 2y+3$ erfolgt analog mit den jeweils dualen Größen.* □

Satz 4.7 *Sei $n = 2p$, $p \in \mathbb{P}$, sowie $\Delta_{2p} = k\cdot t$ mit $k < p$, dann gilt: $z(p,k) > z_{\max}(p,k)$.*

Beweis *Es ist $\Delta_{2p} = p(2p+1) = k\cdot t$, woraus mit $t = 2py+3p$ (siehe Folgerung 4.3)*

$$p(2p+1) = p(2ky+3k)$$

und daraus

$$k\cdot\overline{k} = 2p+1 = 2ky+3k \tag{4.10}$$

folgt.

Die kleinste nicht Germain-Primzahl, für die $k\cdot\overline{k} > 2(k+\overline{k})$ gilt, ist $p = 13$. Mit (4.10) folgt für nicht Germain-Primzahlen $p > 7$: $2p+1 > 2(k+\overline{k})$. Daraus folgt $p > k+\overline{k}-1$. Wir ersetzen $\overline{k}$ durch $2y+3$ (siehe Satz 4.6) und erhalten $p > k+2y+2$ und daraus

$$3p > 2p+k+2y+2 \tag{4.11}$$

Aus (4.10) folgt $2p = 2ky + 3k - 1$. Wir addieren auf der rechten Seite von (4.11) $2p$ und subtrahieren $2ky + 3k - 1$; damit wird aus (4.11)

$$3p > 4p - 2ky + 2y - 2k + 3$$

Hieraus folgt mit Satz 4.2 und (4.3)

$$z = 3p > 4p - 2ky + 2y - 2k + 3 = 2(2p - (y+1)(k-1)) + 1 = z_{\max}$$

womit die Behauptung $z > z_{\max}$ gezeigt ist. □

4.3 Weitere Eigenschaften der dualen Parameter k und $\overline{k}$ bzw. y und $\overline{y}$

Unter den Voraussetzungen $n = 2p, p \in \mathbb{P}$, $\Delta_{2p} = k \cdot t$ mit $k < p$, gelten für die dualen Werte k und $\overline{k}$ bzw. für die dualen Werte $y(p,k)$ und $\overline{y}(p,k)$ weitere interessante Eigenschaften, die wir im Folgenden analysieren.

Da $p \in \mathbb{P}$ und $p \geq 3$ ist, gilt $p = \pm 1\,(4)$. Es folgt

$$2p = \pm 2 = 2\,(4) \tag{4.12}$$

da $-2 = 2\,(4)$ ist, und damit gilt $2p + 1 = 3 = -1\,(4)$, d.h. wir haben

$$k \cdot \overline{k} = 3 = -1\,(4) \tag{4.13}$$

Mithilfe von Satz 4.6 bestimmen wir k modulo 4:

$$k = 2\overline{y} + 3 = \begin{cases} 3 = -1\,(4), & \text{falls } \overline{y} = 0 \\ 1\,(4), & \text{falls } \overline{y} = 1 \\ 3 = -1\,(4), & \text{falls } \overline{y} = 2 \\ 1\,(4), & \text{falls } \overline{y} = 3 \end{cases} \tag{4.14}$$

Damit gilt

$$k = \pm 1\,(4) \tag{4.15}$$

Aus (4.13) und (4.15) folgt: Ist $k = \pm 1\,(4)$, dann ist $\overline{k} = \mp 1\,(4)$. Und hieraus folgt

$$k + \overline{k} = 0\,(4) \tag{4.16}$$

Aus Folgerung (4.4) b) und c) sowie aus (4.13) folgt

$$t \cdot \overline{t} = p^2 \cdot k \cdot \overline{k} = 3 = -1\,(4) \tag{4.17}$$

und aus Folgerung (4.4) b) und c) sowie aus (4.16) folgt

$$t + \overline{t} = p(k + \overline{k}) = 0\,(4) \tag{4.18}$$

Satz 4.8 *Sind (k,t) und (k',t') Partitionen von $2p$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $k, k' < p$ sowie $y = y(p,k)$ und $y' = y'(p,k')$. Dann gilt:*

(1) $y + \overline{y} = \pm 1\,(4)$, *d.h. es ist entweder* $y + \overline{y} = 1\,(4)$ *oder* $y + \overline{y} = 3\,(4)$.

(2) $y + \overline{y} = 1\,(2)$, *d.h. es ist entweder* $y \in \mathbb{G}$ *und* $\overline{y} \in \mathbb{U}$ *oder* $y \in \mathbb{U}$ *und* $\overline{y} \in \mathbb{G}$.

(3) $y + \overline{y} = y' + \overline{y'}\,(4)$.

(4) $2(y + \overline{y} - (y' + \overline{y'})) = 0\,(8)$.

(5) $k + \overline{k} = k' + \overline{k'}\,(8)$.

(6) Entweder ist $y \cdot \overline{y} = 0\,(4)$ *oder* $y \cdot \overline{y} = 2\,(4)$.

(7) Es gilt $y \cdot \overline{y} = 0\,(2)$.

Beweis *Zu (1): Wegen Satz 4.6 gilt* $2y = \overline{k} - 3$ *und* $2\overline{y} = k - 3$. *Es folgt* $2(y + \overline{y}) = k + \overline{k} - 6$. *Mit (4.16) ist* $2(y + \overline{y}) = 2\,(4)$, *woraus unmittelbar die Behauptung folgt.*

Zu (2): Folgt unmittelbar aus (1).

Zu (3): Folgt unmittelbar aus (1).

Zu (4): Folgt unmittelbar aus (3).

Zu (5): Es gilt mithilfe von Satz (4.6) und (4):

$$\begin{aligned} k + \overline{k} - (k' + \overline{k'}) &= 2\overline{y} + 3 + 2\overline{y} + 3 - (2y' + 3 + 2\overline{y'} + 3) \\ &= 2(y + \overline{y} - (y' + \overline{y'})) \\ &= 0\,(8) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Zu (6): Folgt unmittelbar aus (1).

Zu (7): Folgt unmittelbar aus (6). □

5 Fall: $n = p - 1,\ p \in \mathbb{P}$

In diesem Kapitel untersuchen wir für $p \in \mathbb{P}$, $p \geq 3$, die Probleminstanzen $\Pi(p-1,k,t)$ mit $t \geq p - 1$. Es ist also

$$\Delta_{p-1} = \frac{(p-1)p}{2} = k \cdot t \tag{5.1}$$

und $k \leq \frac{p}{2}$. Dabei unterscheiden wir die beiden Fälle $k = \frac{p-1}{2}$ und $k < \frac{p-1}{2}$.

Wie in Kapitel 4 führen wir für weitere Betrachtungen auch hier die Größen y, z und $z_{\max}$ ein, die wir als abhängig von p und k ansehen:

$$t(p,k) = (p-1) \cdot y(p,k) + z(p,k) \ \text{ mit } \ p - 1 \leq z(p,k) < 2(p-1) \tag{5.2}$$

$$z_{\max}(p,k) = 2((p-1) - (y(p,k)+1)(k-1)) + 1 \tag{5.3}$$

Aus schreibtechnischen Gründen notieren wir auch im Folgenden diese Abhängigkeiten nur, wenn sie nicht aus dem Zusammenhang klar sind oder falls sie noch einmal deutlich gemacht werden sollen.

Im vorigen Kapitel haben wir für den Fall $n = 2p$ Symmetrieeigenschaften für diese Parameter gefunden und untersucht. Wir werden sehen, dass auch für den Fall $n = p - 1$ Symmetrieeigenschaften existieren.

5.1 Fall: $k = \frac{p-1}{2}$

Für den Fall $k = \frac{p-1}{2}$ gilt offensichtlich $t = p$.

Folgerung 5.1 *Sei $n = p-1$ mit $p \in \mathbb{P}$ sowie $\Delta_{p-1} = k \cdot t$ mit $k = p$, dann ist $z_{\max}(p,k) = z(p,k) + 2$*

Beweis *Es ist mit (5.2) $t = p - 1 = (p-1) \cdot 0 + p$ und damit $y(p,k) = 0$ sowie $z(p,k) = p$. Aus (5.3) folgt mit $k = \frac{p-1}{2}$ sowie mit den berechneten $y = 0$ und $z = p$: $z_{\max} = 2\left((p-1) - \left(\frac{p-1}{2} - 1\right)\right) + 1 = p + 2 = z + 2$, was zu zeigen war.* □

Für die Fälle $k = p$ ist wie bei den Fällen $k = 2p$ (siehe Folgerung 4.2) jeweils die Differenz von z und $z_{\max}$ konstant gleich zwei.

Satz 5.1 *Sei $n = p - 1$ mit $p \in \mathbb{P}$ sowie $\Delta_{p-1} = k \cdot t$ mit $k = p$, dann existiert für $[\,p-1\,]$ nur die Gauß-Partitionierung $T_i = \{p - (i+1), i+1\}$, $0 \le i < \frac{p-1}{2}$.* □

5.2 Fall: $k < \frac{p-1}{2}$

Aus $\frac{(p-1)p}{2} = k \cdot t$, $p \in \mathbb{P}$, und $k < \frac{p-1}{2}$ folgt, dass k ein echter Teiler von $\frac{p-1}{2}$ sein muss. Seien $k_1, \ldots, k_\ell$ diese Teiler, und t_i, $1 \le i \le \ell$, seien die dazu gehörigen Containergrößen, d.h., es gilt $\frac{(p-1)p}{2} = k_i \cdot t_i$. Dabei gelte $k_i < k_j$ und entsprechend $t_i > t_j$ für $i < j$, $1 \le i, j \le \ell$. Es folgt, dass zum Faktor k_i von $\frac{p-1}{2}$ ein *dualer* Faktor $\overline{k_i} = k_{\ell-(i-1)}$ existiert mit

$$k_i \cdot \overline{k_i} = \frac{p-1}{2}, \text{ d.h. mit } 2k_i \cdot \overline{k_i} + 1 = p \tag{5.4}$$

Falls ℓ ungerade ist, dann gilt $\frac{\ell+1}{2} = \ell - \left(\frac{\ell+1}{2} - 1\right)$ und damit

$$k_{(\ell+1)/2} = \overline{k_{(\ell+1)/2}} \tag{5.5}$$

sowie

$$k^2_{(\ell+1)/2} = \frac{p-1}{2}, \text{ und } 2k^2_{(\ell+1)/2} + 1 = p \tag{5.6}$$

Wir legen auch hier wie in Definition 4.1 fest, dass $k < \overline{k}$, wobei für den Fall ℓ ungerade (5.5) zu beachten ist.

Ist $k_i \cdot t_i = \Delta_{p-1}$, dann existiert zu $\overline{k_i}$ das zu t_i *duale* $\overline{t_i} = t_{\ell-(i-1)}$ mit $\overline{k_i} \cdot \overline{t_i} = \Delta_{p-1} = k_i \cdot t_i$. Mit (5.4) folgt hieraus

$$k_i \cdot t_i = \frac{(p-1)p}{2} = k_i \cdot \overline{k_i} \cdot p$$

und daraus $t_i = \overline{k_i} \cdot p$. Analog kann $\overline{t_i} = k_i \cdot p$ hergeleitet werden. Damit gilt die für den Fall $n = 2p$ geltende Folgerung 4.4 analog für den Fall $n = p - 1$:

Folgerung 5.2 *Sei $n = p - 1$, $p \in \mathbb{P}$ und (k, t) eine Partition von $p - 1$ sowie $\overline{k}$ dual zu k. Dann gilt*

a) *$\overline{t} < t$ bzw. $\overline{t} = t$, falls $k = \overline{k}$ ist;*

b) *$t = p \cdot \overline{k}$;*

c) *$\overline{t} = p \cdot k$.* □

Der folgende Satz besagt, dass der größte Teiler k von $\frac{p-1}{2}$ sogar echt kleiner als $\frac{p}{4}$ ist.

Satz 5.2 *Sei $n = p - 1$, $p \in \mathbb{P}$ und $\Delta_{p-1} = k \cdot t$ mit $k \geq 2$, dann gilt $k \leq \frac{p-1}{4}$.*

Beweis *Die Voraussetzung $k \geq 2$ bedeutet, dass auch $\overline{k} \geq 2$ ist. Wir nehmen an, dass $k > \frac{p-1}{4}$ sei. Dann folgt mit (5.4)*

$$p \cdot k > \frac{p(p-1)}{4} = \frac{p \cdot k \cdot \overline{k}}{2}$$

woraus $2 > \overline{k}$ folgt, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $\overline{k} \geq 2$ ist. □

Folgerung 5.3 *Sei $n = p - 1$, $p \in \mathbb{P}$, $p \geq 5$ und $\Delta_{p-1} = k \cdot t$ mit $k \geq 2$, dann gilt $t > 2(p-1)$.*

Beweis *Wegen Satz 5.2 ist $k < \frac{p}{4}$. Damit folgt*

$$\frac{(p-1)p}{2} = k \cdot t < \frac{p \cdot t}{4}$$

woraus die Behauptung $t > 2(p-1)$ unmittelbar folgt. □

Wir berechnen nun die Parameter y, z und $z_{\max}$ aus (5.2) und (5.3). Es gilt

$$\begin{aligned} t &= \frac{(p-1)p}{2k} \\ &= \frac{(p-1)^2 - 2k(p-1) + 2k(p-1) + p - 1}{2k} \\ &= (p-1) \cdot \frac{(p-1) - 2k}{2k} + \frac{(p-1)(2k+1)}{2k} \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Vergleich mit (5.2) bzw. durch Einsetzen in (5.3)

$$y = \frac{p-1}{2k} - 1 \tag{5.7}$$

$$z = \frac{(p-1)(2k+1)}{2k} \tag{5.8}$$

$$z_{\max} = 2p - \frac{(p-1)(k-1)}{k} - 1 \tag{5.9}$$

Außerdem gilt auch die zweite Bedingung für z in (5.2), weil die Bedingung

$$p - 1 \leq \frac{(p-1)(2k+1)}{2k} < 2(p-1)$$

äquivalent zur Bedingung

$$1 \leq 1 + \frac{2}{k} < 2$$

ist, und diese offensichtlich für alle $k \geq 2$ erfüllt ist.

Durch Ersetzen von k durch $\overline{k}$ in (5.7) erhalten wir das zu y duale $\overline{y}$:

$$\overline{y}(p,k) = y(p,\overline{k}) = \frac{p-1}{2\overline{k}} - 1 \tag{5.10}$$

Mithilfe von (5.4) erhalten wir aus (5.7) bzw. aus (5.10)

Folgerung 5.4 *Sei $n = p - 1$, $p \in \mathbb{P}$, $\Delta_{p-1} = k \cdot t$ und k dual zu $\overline{k}$, dann gilt $y = \overline{k} - 1$ bzw. $\overline{y} = k - 1$.* □

Im Fall $n = p-1$ gelten zum Satz 4.5, der für $n = 2p$ gilt, analoge Aussagen, die unmittelbar aus Folgerung 5.4 folgen:

Satz 5.3 *Sei $n = p - 1$, $p \in \mathbb{P}$, $\Delta_{p-1} = k \cdot t$ und $\overline{k}$ dual zu k, dann gilt*

a) *$\overline{y} < y$ bzw. $\overline{y} = y$ für den Fall $k = \overline{k}$;*

b) *$y(k-1) = \overline{y}(\overline{k} - 1)$.* □

Wir betrachten jetzt noch für den Fall $n = p-1$ das Verhältnis zwischen z und $z_{\max}$, um einen Hinweis darauf zu bekommen, ob ein Transformationsalgorithmus aus Kapitel 2 angewendet werden kann.

Satz 5.4 *Sei $n = p - 1$, $p \in \mathbb{P}$ und $\Delta_{p-1} = k \cdot t$ mit $k \geq 2$, dann gilt $z_{\max}(p,k) - z(p,k) = y(p,k) + 2$.*

Beweis *Wir rechnen durch Einsetzen von (5.9) und (5.8)*

$$
\begin{aligned}
z_{\max} - z &= 2p - \frac{(p-1)(k-1)}{k} - 1 - \frac{(p-1)(2k+1)}{2k} \\
&= \frac{4pk - 2(pk - p - k + 1) - 2k - (2pk + p - 2k - 1)}{2k} \\
&= \frac{p-1}{2k} + 1 \\
&= y + 2 && \text{wegen (5.7)}
\end{aligned}
$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Aus dem Satz folgt unmittelbar

Folgerung 5.5 *Sei $n = p - 1$, $p \in \mathbb{P}$ und $\Delta_{p-1} = k \cdot t$ mit $k \geq 2$, dann gilt $z_{\max}(p,k) > z(p,k)$.* □

Dass für den Fall $n = p - 1$, $p \in \mathbb{P}$, $z_{\max} > z$ gilt, kann auch wie folgt gezeigt werden: Da, wie zu Beginn von Abschnitt 5.2 gezeigt, k ein Teiler von $\frac{p-1}{2}$ ist, folgt, dass $2k$ ein Teiler von $n = p - 1$ ist. Mit Satz 3.5 folgt dann $z_{\max} > z$.

Aus den Folgerungen 5.3 und 5.5 folgt, dass für alle Fälle $n = p - 1$ mit $\Delta_{p-1} = k \cdot t$ und $2 \leq k < \frac{p-1}{2}$ sowohl $t \geq 2(p-1) = 2n$ und $z_{\max}(p,k) > z(p,k)$ gilt, womit der entsprechende Transformationsalgorithmus aus Kapitel 2 angewendet werden kann.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Am Ende von Kapitel 1 wird die triviale Gauß-Partitionierung von $[\,n\,]$ vorgestellt. Für den Fall, dass $t \geq 2n$ ist, wird in Kapitel 2 die Idee der Aufspaltung von Containern entwickelt, um für einen Teil der gespaltenen Container die Idee der Gauß-Befüllung anzuwenden. Für die Befüllung der restlichen Container werden Parameter vorgestellt, mithilfe derer die Befüllung vorgenommen werden kann. Im Kapitel 3 werden diese Parameter und ihre Beziehungen zueinander analysiert. In den Kapiteln 4 und 5 werden Spezialfälle von Prim-Instanzen betrachtet; hier zeigen sich interessante Symmetrieeigenschaften bei den Parametern.

Bereits in Abschnitt 3.4 wird festgehalten, dass die Instanzen $\Pi(n; k, t)$ mit $2k|n$ oder mit $2k|n+1$ die für die Anwendung der Transformationsalgorithmen wichtige Eigenschaft $z < z_{\max}$ erfüllen, genau so wie die in Abschnitt 3.3 eingeführten Q-Instanzen. Eine Frage, die sich stellt, ist, ob mit diesen drei Fällen alle Fälle mit $z < z_{\max}$ erfasst sind. Das heißt: Ist weder $2k|n$ noch $2k|n+1$ und liegt auch keine Q-Instanz vor, gilt dann immer $z \geq z_{\max}$?

Empirische Untersuchungen scheinen eine solche Vermutung zu bestätigen. Eine Klasse von solchen Instanzen bilden die Problemstellungen $\Pi(2p; k, t)$ mit $p \in \mathbb{P}$, aber nicht Germainprim, sowie mit $k < p$, bei denen, wie leicht zu verifizieren ist, keine der drei obigen Eigenschaften zutrifft, und $z > z_{\max}$ ist.

Des Weiteren stellt sich die Frage, ob die Idee der Gauß-Partitionierung nicht auch ohne Spaltung von Containern angewendet werden kann; z.B. dann, wenn n oder $n + 1$ durch Vielfache von k teilbar sind, um dann die Elemente von $[\,n\,]$ „Gauß-artig“ auf die Container aufzuteilen.

Literatur

Ando, K., Gervacio, S., Kano, M.: Disjoint Subsets of Integers having a constant Sum, *Discrete Mathematics 82,* 1990, 7 - 11

Büchel, A., Gilleßen, U., Witt, K.-U.: Betrachtungen zum Cutting sticks-Problem, Technical Report 01-2016, Fachbereich Informatik, Hochschule Bonn-Rhein-Sieg 2016

Chen, F.-L., Fu, H.-L., Wang, Y., Zhou, J.: Partition of a Set of Integers into Subsets with prescribed Sums, *Taiwanese Journal of Mathematics 9,* 2005, 629 - 638

Fu, H.-L., Hu, W.-H.: A Special Partition of the Set I_n, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications 6,* 1992, 57 - 60

Jagadish, M.: An Approximation Algorithm for the Cutting-Sticks Problem, 2015, 170 - 174

Straight, H. J., Schillo, P.: On the Problem of Partitioning $\{1, \ldots, n\}$ into Subsets having equal Sums, *Proceedings of the American Mathematical Society 74(2),* 1979, 229 - 231